Matematikos VBE 2021 pagrindinės sesijos atsakymai ir sprendimai

Sprendė Ieva Kilienė ir Vytautas Miežys

Tai nėra oficiali egzamino vertinimo instrukcija!

Jei pastebėjai klaidų, pranešk vienam iš sprendėjų Facebook'e. Pataisytą klaidą šiame dokumente žymėsime tokiu būdu: $\cancel{\frac{3}{4}}\ \frac{5}{6}$
Paskutinį kartą šis dokumentas atnaujintas 2021 m. birželio 22 d. 10:07.
Atnaujintą šio dokumento versiją rasi adresu `http://bit.ly/matVBE2021`

Testas

1. C
2. D
3. C
4. A
5. A
6. D
7. B
8. C
9. B
10. C

Trumpojo atsakymo uždaviniai

11.1 12

11.2 15π

11.3 18

12. Per 6 valandas.

13.1 $60°$

13.2 $-\vec{a} - \vec{b}$

14.1 $\dfrac{1}{36}$

14.2 $\dfrac{15}{16}$

15. 23

16. 9

17. 30

18. $4 - \sqrt{3}$

Uždaviniai su sprendimais

19.1 Atsakymas: 126 Eur.

Sprendimas.

$$120 \cdot (1 + 0{,}05) = 126 \text{ (Eur)}.$$

19.2 Atsakymas: 378,3 Eur.

Sprendimas.

$$120 + 126 + 126 \cdot (1 + 0{,}05) = 378{,}3 \text{ (Eur)}.$$

19.3 Atsakymas: $2400(1{,}05^n - 1)$.

Sprendimas. Mokėjimai sudaro geometrinę progresiją, pasinaudodami jos sumos formule galime užrašyti:

$$S_n = \frac{120(1 - 1{,}05^n)}{1 - 1{,}05} = -2400(1 - 1{,}05^n) = 2400(1{,}05^n - 1).$$

20.1 Atsakymas: $12x^2 - 18x + 6$.

Sprendimas.

$$(4x^3 - 9x^2 + 6x)' = 12x^2 - 18x + 6$$

20.2 Atsakymas: $(-\infty; 0{,}5) \cup (1; +\infty)$.

Sprendimas. Funkcijos ekstremumus rasime išvestinę prilyginę 0.

$12x^2 - 18x + 6 = 0$

Lygties sprendiniai yra $x_1 = \frac{1}{2}$ ir $x_2 = 1$.

Šiuose taškuose funkcija keičia kryptį. Įsistatę reikšmes iš intervalų $(-\infty; 0{,}5)$, $(0{,}5; 1)$, $(1; +\infty)$ matome, kad funkcijos reikšmės didėja kai $x \in (-\infty; 0{,}5) \cup (1; +\infty)$.

20.3 *Pirmas būdas.* Tarkime, kad funkcijos grafiko liestinės krypties koeficientas yra lygus -1. Tai reiškia, $12x^2 - 18x + 6 = -1$ Išsprendę kvadratinę lygtį matome, kad ji neturi realiųjų sprendinių, todėl prielaida klaidinga.

Antras būdas. Nagrinėkime funkcijos $f'(x)$ reikšmių sritį. Kadangi tai kvadratinė funkcija, kurios šakos nukreiptos į viršų, minimalią reikšmę ši funkcija įgys savo viršūnėje, kurią pažymėkime (x_0, y_0). Skaičiuojame:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-18}{24} = \frac{3}{4}.$$
$$y_0 = f'(x_0) = 12\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 18\left(\frac{3}{4}\right) + 6 = -\frac{3}{4}$$

Taigi matome, kad funkcija $f'(x)$ neįgys reikšmės -1, vadinasi, ir funkcijos f grafiko liestinės krypties koeficientas negali būti lygus -1.

20.4 Atsakymas: $a = 0$.

Sprendimas. Visų pirma randame funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją $F(x)$.

$$F(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + C,$$

čia C – integravimo konstanta.

Norėdami rasti a reikšmę, tokią, kad $\int_{-1}^{a} f(x)dx = -3a^3 - 7$, visų pirma apskaičiuokime $\int_{-1}^{a} f(x)dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{a} f(x)dx &= F(a) - F(-1)\\ &= (a^4 - 3a^3 + 3a^2) - ((-1)^4 - 3(-1)^3 + 3(-1)^2)\\ &= a^4 - 3a^3 + 3a^2 - 7\end{aligned}$$

Prilyginkime gautą reiškinį $-3a^3 - 7$.

$$a^4 - 3a^3 + 3a^2 - 7 = -3a^3 - 7$$
$$a^4 + 3a^2 = 0$$
$$a^2(a^2 + 3) = 0$$

Gauname $a = 0$ arba $a^2 = -3$, pastaroji lygtis realiųjų sprendinių neturi, todėl $a = 0$.

21.1 $x = \pm 1$

21.2 $x = 150°$

21.3 Sprendinių nėra.

22.1 Atsakymas: $\frac{2}{5}$.

Dėžėje yra mėlynų, žalių ir raudonų kamuoliukų. Tikimybė ištraukti ne mėlyną kamuoliuką (tai yra raudoną arba žalią) yra

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Tikimybė ištraukti raudoną kamuoliuką yra lygi tikimybei ištraukti žalią kamuoliuką, todėl abi šios tikimybės yra lygios:

$$\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}.$$

22.2.1 $\cancel{\frac{4}{25}}\ \frac{1}{25}$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

22.2.2 Atsakymas $\frac{16}{25}$.

Sprendimas. Įvykis „kamuoliukai skirtingų spalvų“ yra priešingas įvykiui „kamuoliukai vienodų spalvų“. Apskaičiuokime įvykio „kamuoliukai vienodų spalvų“ tikimybę. Abiejų mėlynų kamuoliukų tikimybę jau apskaičiavome, panašiai samprotaudami gauname, kad abiejų raudonų ir abiejų žalių kamuoliukų tikimybės yra lygios $\frac{4}{25}$. Vadinasi, įvykio „kamuoliukai vienodų spalvų“ tikimybė yra lygi $\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{9}{25}$. O mus dominančio įvykio tikimybė yra $1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

23.1 $36\sqrt{3}$

23.2 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

23.3 Nagrinėkime trikampį $\triangle ABF$. Visų pirma parodykime, kad jis lygiašonis. Pastebėkime, kad BF ir AF yra atitinkamai trikampių $\triangle BDC$ ir $\triangle CAD$ pusiaukraštinės. Kadangi minėtieji trikampiai lygūs ir lygiakraščiai, vadinasi, ir jų pusiaukraštinės lygios, taigi $BF = AF$. Vadinasi, trikampis $\triangle ABF$ yra lygiašonis.

Pagal uždavinio sąlygą žinome, kad EF yra šio trikampio pusiaukraštinė. Kadangi trikampis lygiašonis, tai pusiaukraštinė, nubrėžta į trikampio pagrindą, sutampa su aukštine. Vadinasi, EF – trikampio $\triangle ABF$ aukštinė. Taigi $EF \perp AB$.

23.4 Šiame įrodyme remsimės tuo, kad atstumas tarp dviejų prasilenkiančių tiesių yra lygus ilgiui tokios atkarpos, kuri yra statmena abiems tiesėms.

Ankstesnėje uždavinio dalelėje parodėme, kad $EF \perp AB$. Taigi beliko parodyti, kad $EF \perp CD$. Samprotaujame analogiškai – trikampis $\triangle DEC$ yra lygiašonis, vadinasi, į pagrindą nubrėžta pusiaukraštinė ir aukštinė sutampa. Taigi $EF \perp CD$.

Vadinasi, atkarpa EF yra statmena tiesėms AB ir CD, taigi jos ilgis yra lygus ilgiui tarp šių prasilenkiančių tiesių.

24. Atsakymas $x = e$.

Pagrindimas. Raskime funkcijos f ekstremumus. Pirmiausia randame funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Prisilyginkime ją nuliui ir išspręskime gautą lygtį:

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \implies 1 - \ln x = 0 \implies \ln x = 1 \implies x = e.$$

Taigi funkcija f didžiausią reikšmę intervale $\left[\frac{1}{e}; e^3\right]$ įgys, kai argumentas bus lygus vienam iš skaičių $\frac{1}{e}$, e arba e^3. Skaičiuojame:

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln \frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} = \frac{-1}{\frac{1}{e}} = -e < 0$$

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} = 0{,}367\ldots$$

$$f(e^3) = \frac{\ln e^3}{e^3} = \frac{3}{e^3} = 0{,}149\ldots$$

Matome, kad funkcija f didžiausią reikšmę įgyja, kai $x = e$.

25. Pažymėkime $AB = x$, tuomet pagal sąlygą $BC = kx$. Tuomet pagal sinusų teoremą turime lygybę

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{kx}{\sin 2\alpha}.$$

Pasinaudoję lygybe $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ir pagrindine proporcijos savybe gauname lygybę

$$x \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = kx \cdot \sin \alpha.$$

Kadangi $\alpha \in (0, \pi/3)$, tai $\sin \alpha \neq 0$. Taipogi $x \neq 0$, kadangi tai trikampio kraštinės ilgis. Padalíję abi lygybės puses iš $x \sin \alpha$ gauname

$$2 \cos \alpha = k \implies \cos \alpha = \frac{k}{2}.$$

Dabar rasime, kokias reikšmes gali įgyti k. Kadangi pagal sąlyga $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ir $\cos \alpha$ šiame intervale yra mažėjanti funkcija, tai $\cos 0 > \cos \alpha > \cos \frac{\pi}{3}$, t.y. $1 > \cos \alpha > \frac{1}{2}$. Apsukę dvigubąją nelygybę gauname $\frac{1}{2} < \cos \alpha < 1$. Kadangi $\cos \alpha = \frac{k}{2}$, tai $\frac{1}{2} < \frac{k}{2} < 1$. Padauginę iš 2 gauname $1 < k < 2$, t. y. $k \in (1, 2)$.

26. Atsakymas: -2.

Sprendimas. I būdas.

Skaičiai a, b, c sudaro aritmetinę progresiją, todėl

$$\frac{a+c}{2} = b.$$

Žinome, kad b, c, a yra iš eilės einantys geometrinės progresijos nariai, todėl

$$\sqrt{ab} = c.$$

Gaunane lygčių sistemą: $\begin{cases} \frac{a+c}{2} = b. \\ \sqrt{ab} = c, \end{cases}$

Ją pertvarkome: $\begin{cases} \text{a+c =2b} \\ \text{ab=c}^2. \end{cases}$

Antrąją lygybę perrašykime: $c^2 = ab$, ir padalinkime pirmąją lygybę iš antrosios.

$$\frac{a+c}{c^2} = \frac{2}{a}$$
$$a^2 + ac = 2c^2$$
$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{a}{c} = 2$$

Kadangi c, a yra iš eilės einantys geometrinės progresijos nariai, tai $a = qc$, čia q – geometrinės progresijos vardiklis. Vadinasi, $q = \frac{a}{c}$.

Taigi ankstesnė lygtis įgyja tokį pavidalą: $q^2 + q - 2 = 0$. Šios lygties sprendiniai yra $q = 1$ ir $q = -2$. Sprendinys $q = 1$ netinka, nes sąlygoje nurodyta, kad $a \neq b$, todėl $q = -2$.

Sprendimas. II būdas.

a, b, c yra iš eilės einantys aritmetinės progresijos nariai. Pažymėkime šios progresijos skirtumą d. Tuomet teisingos lygybės $a = b - d$, $c = b + d$, t. y. skaičiai $b - d, b, b + d$ yra iš eilės einantys aritmetinės progresijos nariai.

Kadangi b, c, a yra iš eilės einantys geometrinės progresijos nariai (pažymėkime šios progresijos vardiklį q), tai $c = bq$, $a = bq^2$. Tuomet dviem skirtingais būdais užrašę skaičius a ir c gauname šią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} b - d = bq^2 & (= a) \\ b + d = bq & (= c) \end{cases}$$

Pastebėkime, kad sudėjus šias lygtis pavyktų atsikratyti nežinomojo d. Taip padarę gauname lygtį

$$2b = bq + bq^2$$

Norisi išprastinti b. Galime abi lygties puses padalyti iš b, kadangi $b \neq 0$ (priešingu atveju a taip pat būtų lygus 0, o pagal sąlygą $a \neq b$). Tai padarę ir pertvarkę gauname įprastą kvadratinę lygtį

$$q^2 + q - 2 = 0,$$

kurią išsprendę gauname du sprendinius: $q = 1$ arba $q = -2$. Sprendinys $q = 1$ netinka pagal uždavinio sąlygą, nes jei $q = 1$, tai $b = a$, o taip nėra. Vadinasi, $q = -2$.

Sprendimas. III būdas.

Kadangi a, b, c – iš eilės einantys aritmetinės progresijos nariai, tai $b = \frac{1}{2}(a + c)$, o iš čia $2b = a + c$. Kadangi b, c, a – iš eilės einantys geometrinės progresijos nariai (vardiklį pažymėkime q), tai $c = bq, a = bq^2$, vadinasi,

$$2b = bq^2 + bq.$$

Jei $b = 0$, tai tuomet visi geometrinės progresijos nariai sutampa ir $b = a$, tačiau pagal sąlygą $b \neq a$, vadinasi, $b \neq 0$. Vadinasi, galime abi lygties puses dalyti iš b. Tą padarę ir pertvarkę gauname lygtį

$$q^2 + q - 2 = 0,$$

kurios sprendiniai yra $q = -2$ ir $q = 1$. Pastarasis sprendinys netinka, nes tokiu atveju $a = bq^2 = b \cdot 1^2 = b$, o pagal sąlygą taip nėra. Vadinasi, $q = -2$.